Kartkówka 27.03.2018

Zadanie 1. Znaleźć granicę funkcji

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x+1)+y^2(y+1)}{x^2+y^2}.$$

Sposób I. Zauważmy, że $|y^3| \le |y|(x^2+y^2)$, a więc

$$0 \le \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le |y| \to 0.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wnioskujemy, że $\frac{y^3}{x^2+y^2} \to 0$ przy $(x,y) \to (0,0)$. Analogicznie $\frac{x^3}{x^2+y^2} \to 0$. Razem więc mamy

$$\frac{x^2(x+1)+y^2(y+1)}{x^2+y^2} = 1 + \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2} \longrightarrow 1+0+0 = 1.$$

Sposób II. Rozważmy dowolny ciąg (x_n, y_n) zbieżny do $(0,0)$ i odpowiadający mu ciąg (r_n, α_n) współrzędnych biegunowych; wówczas $r_n \to 0$. Przekształcamy:

$$\begin{aligned}\frac{x_n^2(x_n+1)+y_n^2(y_n+1)}{x_n^2+y_n^2} &= \frac{r_n^2\cos^2\alpha_n(r_n\cos\alpha_n+1)+r_n^2\sin^2\alpha_n(r_n\sin\alpha_n+1)}{r_n^2\cos^2\alpha_n+r_n^2\sin^2\alpha_n}\\ &= \frac{r_n^2+r_n^3(\sin^3\alpha_n+\cos^3\alpha_n)}{r_n^2}\\ &= 1+r_n(\sin^3\alpha_n+\cos^3\alpha_n)\\ &\to 1,\end{aligned}$$

gdyż $\sin^3\alpha_n + \cos^3\alpha_n$ jest ciągiem ograniczonym (nie przekracza 2 w wartości bezwzględnej).

Uwaga. Dopuszczalna jest konwencja (stosowana zresztą na zajęciach), w której nie mówimy o konkretnym ciągu (r_n, α_n) i opuszczamy dolny indeks n.

Zadanie 2. Sformułować definicję granicy funkcji $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w punkcie $(0,0)$. Podać (bez dowodu) dowolny przykład funkcji f, dla której taka granica nie istnieje.

☺ Definicja Heinego: Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli dla każdego ciągu punktów $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ zbieżnego do $(0,0)$ i takiego że $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, ciąg $f(x_n, y_n)$ jest zbieżny do b.

☺ Definicja Cauchy'ego: Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ spełniającego $0 < \|(x,y)\| < \delta$ zachodzi $\|f(x,y) - b\| < \varepsilon$.

☺ Definicja otoczeniowa: Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli dla każdego otoczenia $U \subseteq \mathbb{R}$ punktu b istnieje otoczenie $V \subseteq \mathbb{R}^2$ punktu $(0,0)$ takie, że $f(x,y) \in U$ dla każdego $(x,y) \in V$ różnego od $(0,0)$.

Można oczywiście powyższe definicje formułować, używając mniejszej lub większej ilości symboli czy formuł matematycznych. Da się je nawet sformułować ściśle samymi słowami. Nie jest jednak definicją

> ☹ Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = b$.

ani

> ☹ Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli $f(x,y) \to b$ przy $(x,y) \to (0,0)$.

Podane warunki są po prostu synonimami i nic nie wyjaśniają. Również

> ☹ Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli ciąg (x_n, y_n) zbiega do $(0,0)$, a $f(x_n, y_n)$ zbiega do b.

> ☹ Funkcja f ma granicę b w $(0,0)$, jeśli $\|f(x,y) - b\| < \varepsilon$ zachodzi dla każdego punktu (x,y) spełniającego $0 < \|(x,y)\| < \delta$.

nie są poprawnymi definicjami, gdyż brakuje w nich kwantyfikatorów (*istnieje*, *dla każdego* etc.) i przez to są bez sensu – można słusznie zapytać *A co to jest δ i ε?* albo *Czym jest ciąg (x_n, y_n)?*.

Granicy w $(0,0)$ nie ma np. funkcja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \geq 0, \\ 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Możliwych przykładów jest wiele.